Anhang A

Ermittlung der Pulsübertragungsfunktion eines Schwinggliedes

0. Einleitung

In der klassischen Regelungstechnik beruht die Bestimmung der Reglerparameter fast immer auf der Annahme, die Regelstrecke besitzt ein PT_S-Verhalten, das heißt, es handelt sich um ein Schwingglied 2. Ordnung.

Trotzdem findet man in der Literatur nur selten einen Hinweis auf die entsprechende Pulsübertragungsfunktion (nur gefunden in /ISER1/), die für die Bestimmung der Reglerparameter bei digitalen Reglern benötigt wird.

Ich werde hier versuchen, die entsprechenden Schritte zur Bestimmung der Pulsübertragungsfunktion möglichst umfassend darzustellen.

1. Übertragungsfunktion im La-Place-Bereich

Die Übertragungsfunktion einer PT_S-Regelstrecke lautet (p - LaPlace-Operator):

$$G_S(p) = \frac{K_S}{T_S^2 p^2 + 2D_S T_S p + 1} \tag{A.1}$$

mit

K_S Streckenverstärkung
T_S Streckenzeitkonstante
D_S Streckendämpfung ($0<D_S<1$)

2. Halteglied

Da in einem digitalen Regler Signale nur amplituden- und zeitgequantelt verarbeitet werden können, müssen die entsprechenden Eingangssignale abgetastet werden.
Ist die Tastrate genügend groß (siehe Shannon-Theorem), dann kann angenommen werden, daß die Abtastfolge die reale Zeitfunktion widerspiegelt.
Da der Abtastwert nur im Zeitpunkt der Abtastung zur Verfügung steht, muß er durch ein Halteglied bis zum nächsten Tastzeitpunkt bereitgestellt werden.

In den meisten Fällen wird ein Halteglied 0.Ordnung verwendet, das heißt, daß der abgetastet Wert für eine Tastperiode konstant gehalten wird.

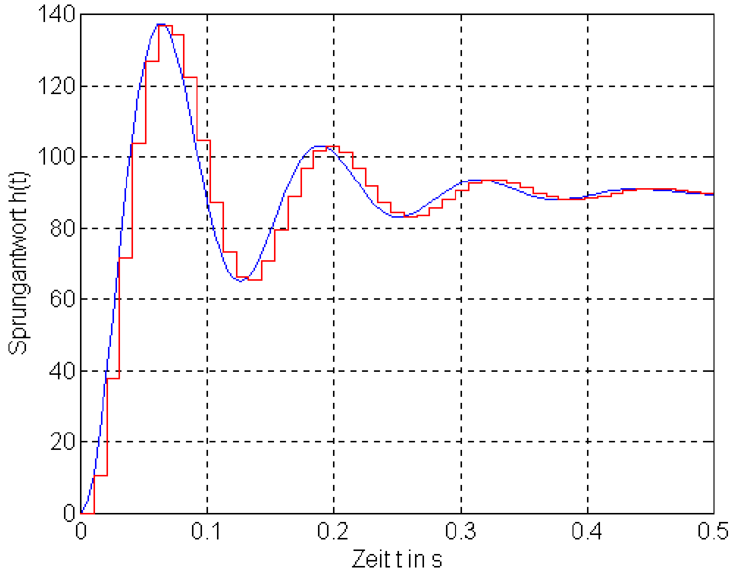

Abb. A.1 Übergangsfunktion eine PT_S-Gliedes und Abtastung mit Halteglied 0.Ordnung.

Die Übertragungsfunktion für ein Halteglied 0. Ordnung lautet /NEDR/ :

$$G_H(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \tag{A.2}$$

mit T Tastperiodendauer

Der reale Prozeß (das PT_S-Glied) wird über dieses Halteglied an den Regler übermittelt. Es ist also klar, daß die Eigenschaften des Haltegliedes bei nachfolgenden Berechnungen mit berücksichtigt werden müssen.

3. Z-Übertragungsfunktion mit vorgeschaltetem Halteglied

Das diskrete Prozeßmodell besteht also aus Halteglied und Übertragungsfunktion der Regelstrecke. Im LaPlace-Bereich werden getastete Signale immer in e^{pT}-Formen dargestellt. Dadurch werden die Gleichungen sehr unhandlich.
Durch die Z-Transformation werden diese Gleichungen wieder sehr einfach. Das diskrete Pro-zeßmodell wird jetzt durch die **Pulsübertragungsfunktion *$HG_S(z)$*** dargestellt.

$$HG_S(z) = Z\left\{ L^{-1}\left\{ G_H(p) \cdot G_S(p) \right\}\Big|_{t=kT} \right\} \tag{A.3}$$

Wie in /NEDR/ dargestellt vereinfacht sich diese Gleichung zu :

$$HG_S(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot Z\left\{ \frac{G_S(p)}{p} \right\} \tag{A.5}$$

Wie aus (A.5) ersichtlich, ist für $\dfrac{G_S(p)}{p}$ die Z-Transformation durchzuführen.

$$\frac{G_S(p)}{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_S}{T_S^2 p^2 + 2 D_S T_S p + 1} \qquad \text{(A.6)}$$

4. Partialbruchzerlegung

Für die Z-Transformation muß $\frac{G_S(p)}{p}$ durch eine Partialbruchzerlegung in einfache Summanden aufgeteilt werden. Die Schwierigkeit besteht in der Behandlung der komplexen Polstellen des Schwinggliedes. Diese komplexen Polstellen werden bei der Partialbruchzerlegung wie folgt bearbeitet /LB1/:

$$\frac{G_S(p)}{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_S}{T_S^2 p^2 + 2 D_S T_S p + 1} = K_S \cdot \left[\frac{C_1}{p} + \frac{C_2 \left(p - a \right) + C_3 \omega}{\left(p - a \right)^2 + \omega^2} \right] \qquad \text{(A.7)}$$

Da K_S als Faktor vor der Klammer steht, soll er vorläufig weggelassen und später wieder verwendet werden.

Die Konstante C_1 läßt sich einfach ermitteln über die Grenzwertmethode.

1. Multipliziere die Gleichung mit p
2. Bilde den Limes „p gegen 0“

Damit ergibt sich :

$C_1 = 1$

Für die weitere Berechnung muß nun $T_S^2 p^2 + 2 D_S T_S p + 1 = \left(p - a \right)^2 + \omega^2$ gebildet werden. Dafür verwendet man die quadratische Ergänzung :

$$T_S^2 p^2 + 2 D_S T_S p + 1 = T_S^2 \cdot \left(p^2 + \frac{2 D_S}{T_S} p + \frac{1}{T_S^2} \right) = T_S^2 \cdot \left[\left(p^2 + 2 \frac{D_S}{T_S} p + \frac{D_S^2}{T_S^2} \right) + \frac{1 - D_S^2}{T_S^2} \right]$$

$$T_S^2 p^2 + 2 D_S T_S p + 1 = T_S^2 \cdot \left[\left(p - a \right)^2 + \omega^2 \right] \qquad \text{(A.8)}$$

mit $\quad a = -\frac{D_S}{T_S} \quad$ und $\quad \omega = \frac{\sqrt{1 - D_S^2}}{T_S}$

In Gleichung (A.7) eingesetzt ergibt sich nun :

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{T_S^2 p^2+2D_S T_S p+1}=\left[\frac{1}{p}+\frac{C_2\left(p-a\right)}{T_S^2\cdot\left[\left(p-a\right)^2+\omega^2\right]}+\frac{C_3\omega}{T_S^2\cdot\left[\left(p-a\right)^2+\omega^2\right]}\right]$$

Bringt man nun beide Seiten auf einen Hauptnenner und kürzt diesen weg, dann entstehen folgende Gleichungen :

$$1=T_S^2 p^2-2T_S^2 ap+T_S^2\left(a^2+\omega^2\right)+C_2 p^2-C_2 a-C_3\omega p$$

bzw. $$0=p^2\left(T_S^2+C_2\right)+p\left(C_3\omega-C_2 a-2T_S^2 a\right)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man die Konstanten C_2 und C_3 .

$$C_2=-T_S^2 \qquad \text{und} \qquad C_3=T_S^2\cdot\frac{a}{\omega}$$

Damit ergibt sich aus (A.7) und (A.8) :

$$\frac{G_S(p)}{p}=K_S\cdot\left[\frac{1}{p}+\frac{-T_S^2\left(p-a\right)}{T_S^2\cdot\left[\left(p-a\right)^2+\omega^2\right]}+\frac{T_S^2 a\omega}{T_S^2\omega\cdot\left[\left(p-a\right)^2+\omega^2\right]}\right]$$

bzw. $$\frac{G_S(p)}{p}=K_S\cdot\left[\frac{1}{p}-\frac{\left(p-a\right)}{\left[\left(p-a\right)^2+\omega^2\right]}+\frac{a\omega}{\omega\cdot\left[\left(p-a\right)^2+\omega^2\right]}\right] \qquad \text{(A.9)}$$

Damit ist das Ziel der Partialbruchzerlegung erreicht. $\frac{G_S(p)}{p}$ ist nun eine Summe aus einfach zu transformierenden Teilsummanden geworden.

<u>5. Z-Transformation</u>

Durch die sinnvolle Zerlegung von $\frac{G_S(p)}{p}$ kann jetzt unmittelbar $Z\left\{\frac{G_S(p)}{p}\right\}$ gebildet werden.

Mit den Transformationsregeln aus /LB7/ und (A.9) ergibt sich (A.10) :

$$Z\left\{\frac{G_S(p)}{p}\right\}=K_S\cdot\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z\left(z-\mathrm{Re}(z_i)\right)}{\left(z-\mathrm{Re}(z_i)\right)^2+\left(\mathrm{Im}(z_i)\right)^2}+\frac{a}{\omega}\cdot\frac{z\cdot\mathrm{Im}(z_i)}{\left(z-\mathrm{Re}(z_i)\right)^2+\left(\mathrm{Im}(z_i)\right)^2}\right]$$

Es gilt : $z = e^{pT}$ mit $p = a \pm j\omega$ folgt :

$$z = \left(e^{aT + j\omega T}\right) = e^{aT} \cdot e^{j\omega T} \xrightarrow{EulerscheFormel} |z| \cdot e^{j \arg z} = |z| \cdot \left(\cos(\arg z) + j\sin(\arg z)\right)$$

Mit $|z| = e^{aT}$ und $\arg z = \omega T$ folgt also für Real- und Imaginärteil von z :

$$\mathrm{Re}(z_i) = e^{aT} \cdot \cos(\omega T) \qquad \mathrm{Im}(z_i) = e^{aT} \cdot \sin(\omega T)$$

und $\left(z - \mathrm{Re}(z_i)\right)^2 = z^2 - z \cdot 2e^{aT}\cos(\omega T) + e^{2aT}\cos^2(\omega T)$

$$\mathrm{Im}^2(z_i) = e^{2aT}\sin(\omega T)$$

In (A.10) eingesetzt ergibt sich unter Beachtung von (A.5) die folgende Beziehung (A.11):

$$HG_S(z) = K_S \cdot \frac{z \cdot \left[1 - e^{aT}\left(\cos(\omega T) - \frac{a}{\omega}\sin(\omega T)\right)\right] + e^{aT}\left(e^{aT} - \cos(\omega T) - \frac{a}{\omega}\sin(\omega T)\right)}{z^2 - z \cdot 2e^{aT}\cos(\omega T) + e^{aT} \cdot e^{aT}}$$

Stellt man $HG_S(z)$ in Polynomschreibweise dar, so entsteht

$$HG_S(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{A.12}$$

Die Faktoren berechnen sich aus (A.11) wie folgt :

$$b_1 = K_S \cdot \left[1 - e^{aT}\left(\cos(\omega T) - \frac{a}{\omega}\sin(\omega T)\right)\right] \tag{A.13}$$

$$b_2 = K_S \cdot e^{aT}\left(e^{aT} - \cos(\omega T) - \frac{a}{\omega}\sin(\omega T)\right) \tag{A.14}$$

$$a_1 = -2e^{aT}\cos(\omega T) \tag{A.15}$$

$$a_2 = e^{aT} \cdot e^{aT} \tag{A.16}$$

6. Berechnungsschritte

1. $a = -\frac{D_S}{T_S}$

2. $\omega = \frac{\sqrt{1 - D_S^2}}{T_S}$

3. $\frac{a}{\omega}$

4. e^{aT}

5. $\cos(\omega T)$

6. $\sin(\omega T)$

7. ... 10. entsprechen (A.13 ... A.16)

Ein entsprechendes Softwarelisting in MatLAB (*STF_PS2Z.M*) und in TurboPascal (*HGzVonPTsGlied*) finden Sie in Anhang B.